

Feuille d'exercices 1

1 Espaces de probabilités

Exercice 1. Un client achète une glace chez un vendeur. Les possibilités sont les suivantes : on peut choisir une ou deux boules, et chaque boule peut être soit fraise, soit vanille, soit chocolat. On note S et D les événements pour lesquels le client choisit une et deux boules (« simple » ou « double »), et F , V et C pour l'événement où le client choisit au moins une boule fraise, vanille et chocolat.

1. Écrivez l'événement « le client n'a choisi que vanille » en utilisant les événements ci-dessus.
2. Même question pour l'événement « le client a choisi au plus une boule de fraise ».

Exercice 2. Pour un foyer choisi uniformément au hasard, on a une probabilité $\mathbb{P}(C) = 25\%$ d'avoir au moins un chat, $\mathbb{P}(D) = 38\%$ d'avoir un au moins un chien, $\mathbb{P}(TV) = 96\%$ d'avoir une télévision, $\mathbb{P}(PC) = 90\%$ d'avoir un ordinateur.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathbb{P}(C \cup D)$?
2. Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathbb{P}(TV \cap PC)$?

Exercice 3. Environ 57% des ménages ont (au moins) un animal de compagnie, 38% ont un chien, 25% ont un chat, et 19% ont un chien et un chat.

Quelle est la probabilité qu'un foyer choisi uniformément au hasard ait un animal de compagnie mais ni chien ni chat ?

2 Conditionnement

Exercice 4. On dispose sur un certain espace de probabilité de deux événements A et B . Parmi les probabilités suivantes, le(s)quelle(s) sont compatibles avec les propriétés d'un espace de probabilité ?

1. $\mathbb{P}(A) = 50\%$, $\mathbb{P}(B) = 50\%$, $\mathbb{P}(A|B) = 50\%$.
2. $\mathbb{P}(A) = 40\%$, $\mathbb{P}(B) = 70\%$, $\mathbb{P}(A|B) = 10\%$.
3. $\mathbb{P}(A) = 10\%$, $\mathbb{P}(B) = 20\%$, $\mathbb{P}(A|B) = 80\%$.
4. $\mathbb{P}(A) = 10\%$, $\mathbb{P}(B) = 50\%$, $\mathbb{P}(A|B) = 50\%$.

Exercice 5. Luc a deux pièces, une classique, et une truquée dont les deux côtés sont « face ». Il choisit une des deux pièces, la lance, et regarde le résultat.

1. Supposons qu'il choisit la pièce truquée aléatoirement avec probabilité p . Quelle est la probabilité que le résultat de l'expérience soit « face » ?
2. Dans les mêmes circonstances, vous n'avez pas vu la pièce choisie, mais vous savez que le résultat est « face ». Quelle est la probabilité que la pièce choisie était la pièce truquée ? Même questions lorsque le résultat est « pile ».

Exercice 6. Soient A , B et C trois événements d'un espace de probabilités. Lorsqu'elle est bien définie, prouvez la relation suivante :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C).$$

Dans quelles circonstances est-elle valable ?

Exercice 7. Votre chien a une vie simple que vous partez au travail. Il peut faire cinq activités : faire la sieste, jouer avec ses jouets, manger ses croquettes, regarder par la fenêtre, ou manger le canapé. Votre chien fait trois activités par jour, l'une après l'autre (par exemple faire une sieste, puis faire une autre sieste, puis jouer), et il choisit sa prochaine activité en considérant uniquement la dernière effectuée. Il réfléchit de la façon suivante.

- Quand il commence sa journée, ou qu'il vient de faire une sieste, il peut regarder par la fenêtre, faire une sieste ou jouer, avec la même probabilité.
- Quand il vient de jouer, il est fatigué. Il peut faire la sieste, regarder par la fenêtre, ou manger ses croquettes.
- Quand il a mangé, il est content et va faire une sieste.
- Après avoir regardé par la fenêtre, il s'ennuie. Ça peut le motiver pour jouer (45%), ou il peut être déprimé et faire une sieste (45%). Ou alors il va manger le canapé par frustration (10%).

Quelle est la probabilité que votre chien ait mangé le canapé lors de votre retour ?

Exercice 8. Soient A , B et C trois événements indépendants. Montrez que A est indépendant de $B \cap C$ et $B \cup C$.